Mémoire professionnel

La démonstration

Julien Froidevaux et Arnaud Rodevy

Directeur : Jacky Sip

UVHC

Master MEF

Mathématiques

Année universitaire 2011-2012

Remerciements

Nous remercions Jacky Sip, notre directeur de mémoire, pour ses conseils, sa patience et son investissement dans l'encadrement de notre mémoire.
Sa grande expérience dans l'enseignement des mathématiques au collège, et son amour de la démonstration en géométrie nous ont beaucoup apporté.

Nous remercions également Sylvie Derviaux, François Goichot, Cécile Perrin et Jalel Tabka pour avoir, au fil des séances collectives, donné de leur temps pour nous écouter et nous conseiller.

Table des matières

Introduction

Une démonstration mathématique est un raisonnement logique s'appuyant sur des règles de déduction, qui utilise des résultats déjà établis pour parvenir pas à pas à un nouveau résultat que personne ne pourra contester.

Depuis Euclide (IIIème siècle avant J.C.)et ses *Éléments*, les mathématiques sont fondées sur le principe de la démonstration : partant d'axiomes, on démontre, les uns après les autres, des résultats de plus en plus forts.

Par essence, une démonstration doit être incontestable. Un raisonnement atteint le stade de démonstration lorsqu'il a été lu et acquiescé par les pairs de son auteur.

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques au secondaire pourtant, l'élève n'est pas habitué à questionner le bien-fondé des propriétés énoncées par le professeur, et nous avons pu constater durant nos stages que bien souvent, les démonstrations sont bon gré, mal gré, les premières à être sacrifiées pour tenir le programme de l'année. Cette constatation change en entrant dans l'enseignement supérieur, qui s'attache à démontrer autant que faire se peut toutes les propositions énoncées.

Pour autant, « pourquoi ? » est une des premières, et une des plus fréquentes questions que pose un enfant. Nous avons besoin dès le plus jeune âge de comprendre ce que nous observons. Nous cherchons des explications, des preuves, et à mesure que le temps passe, nous refusons de croire aveuglément.

Les élèves du secondaire sont habitués et même « éduqués » à croire leurs professeurs sur parole. Pour autant, les programmes du collège et du lycée soulignent l'importance de développer le sens critique chez un élève.
Aussi semble-t-il essentiel, avant toute autre initiative, de convaincre les élèves de l'importance de la démonstration, en leur proposant des activités qui mettent en défaut la simple observation. Cela constituera la première partie de notre problématique.

Par ailleurs, nous avons constaté que lorsqu'une bonne part des élèves avaient en tête les éléments d'une démonstration, seule une portion d'entre eux était capable de transformer ces idées en démonstration formelle, rédigée, incontestable. Ainsi, aider les élèves à mettre en place leurs idées, donner des méthodes qui leur permettent de rédiger une démonstration, au travers d'activités qui respectent la progression de la classe, tout en mettant l'accent sur « savoir écrire une démonstration » constituera la seconde partie de notre problématique.

A propos de nos stages

Le stage d'Arnaud

Mon stage s'est déroulé au collège Emile Littré de Douchy-les-mines. M.Mentecki, mon maitre de stage, enseigne à deux classes de 6ième et deux classe de 4ième.

Durant les 6 heures (environ) de stage hebdomadaires, j'ai observé et je suis intervenu dans ses classes. Cependant il est arrivé parfois que je puisse aller observer d'autres classes des collègues de Mr Mentecki. Parmi ces autres classes, il y avait une classe de 5ième et une de 3ième. C'est en particulier cette dernière car c'est avec les 3ièmes que j'ai pu faire l'activité sur les phrases mélangées (voir annexe 6).

La démonstration est vue dans cet établissement de façon unique par tous les enseignants.
Chaque énoncé de propriété est rédigé de la manière suivante :
Comme.... alors.......
Si un élève utilise un autre type de raisonnement il ne sera pas pénalisé bien sûr.

Les élèves disposent d'un classeur de géométrie (voir annexes 1 et 2), dans lequel sont répertoriées les différentes propriétés et méthodes vues en cours. On peut voir que toutes sont écrites en utilisant le "Comme... Alors..."
Ce classeur est donné en début d'année et au fur et à mesure des cours les élèves utilisent des couleurs pour coder les images (en vert les hypothèses et en rouge la conclusion).
La première page du classeur (annexe 1) donne des indications et permet aux élèves de trouver très rapidement ce dont ils ont besoin.
Lors du passage de classe (par exemple de la 5ième à la 4ième), on donne aux élèves un nouveau classeur qui reprend tout le classeur précédent auquel il a été rajouté d'autres propriétés suivant le programme.

Le stage de Julien

Mon stage en responsabilités s'est déroulé au collège Watteaux de Valenciennes, sous la tutelle de Nathalie Camurat. J'ai pu suivre ses trois classes de cinquième, une classe de quatrième, et une classe de troisième.

Le collège Antoine Watteaux est un collège dit « centre ville », qui a une tradition de réussite scolaire que les équipes éducative et de direction ont à cœur de maintenir.

Mme Camurat est très attachée à apprendre à ses élèves à mener à bien une démonstration, particulièrement en géométrie. Ainsi, je suis arrivé dans des classes dans lesquelles elle ne jugeait pas utile de travailler ce thème à ce stade de l'année.

J'ai néanmoins pu expérimenter une fois avec ses élèves de troisième, et une autre fois avec une autre classe de troisième, dont j'avais la charge le mardi après-midi (cette classe étant très en retard dans le programme de mathématique, M. le principal adjoint m'a proposé de leur donner deux heures de cours hebdomadaires, en plus de leurs cours de mathématiques habituels).
Ces (rares) expérimentations ont été riches en apprentissages.

I Les activités que nous n'avons pas pu mettre en œuvre

Nos stages se déroulant au collège, certains types de raisonnement, tel que la récurrence, n'ont pas pu être abordés avec les élèves.

Par ailleurs, la progression des classes que nous avons suivies n'a pas permis la mise en œuvre de certaines activités.

Voici les activités que nous n'avons pas pu proposer à nos élèves, pour l'une ou l'autre des raisons évoquées ci-dessus.

I.1 Mise en défaut de logiciels

Les deux activités suivantes sont à réaliser avec des élèves en première S.
Le but de ces deux activités est d'insister sur les limites des logiciels et en particulier ici Algobox (activité A) et Géogébra (activité B).

I.1.a) Activité A

Niveau : Première S
Pré-requis : Résolution du second degré.

Objectifs et mise en oeuvre :

Cette activité n'a pas pu être réalisée car je n'ai pas eu d'élèves de niveau première S.
Le but de cet exercice est de faire travailler les élèves sur Algobox pour le montrer qu'il est pratique pour faire des calculs d'utiliser l'ordinateur mais qu'il faut avoir du recul sur les résultats obtenus.
Pour cela, la première question consiste à résoudre des équations du second degré assez simples.
Les questions 2) à 5) consistent à les mettre en confiance sur l'efficacité du logiciel.
Les dernières questions permettront de leur faire comprendre qu'aussi pratique soit'il, le logiciel à ses limites alors que le calcul à la main permet de répondre sans erreurs.

Enoncé de l'exercice :
1) Déterminez les solutions des équations suivantes :
a) $x^2 - 4 = 0$. b) $4x^2 - 9 = 0$.
c) $x^2 + 4x + 4 = 0$. d) $16x^2 - 24x + 9 = 0$.
e) $x^2 - 5x + 6 = 0$. f) $-2x^2 + 11x - 5 = 0$.

2) Ouvrez le fichier annexe 1.

3) Lancez l'algorithme avec les valeurs suivantes et noter les résultats dans chacun des cas :
a) $a = 1$ $b = 0$ $c = -4$. b) $a = 4$ $b = 0$ $c = -9$.
c) $a = 1$ $b = 4$ $c = 4$. d) $a = 16$ $b = -24$ $c = 9$.
e) $a = 1$ $b = -5$ $c = 6$. f) $a = -2$ $b = 11$ $c = -5$.

4) Comparez les résultats de la question 3) avec ceux de la question 1).

5) Selon vous que fait cet algorithme ?
6) Entrez les valeurs $a = 1$, $b = (10^{1000000}) - 1$ et $c = -10^{1000000}$ et interprétez le résultat.

7) Montrez que 1 est solution de l'équation $x^2 + (10^{1000000} - 1)x - 10^{1000000}$.

8) Comment interpréter ce résultat ?

I.1.b) Activité B

Niveau : 4ième
Pré-requis : Théorème de la droite des milieux.

Objectifs et mise en oeuvre :

Je n'ai pas pu faire cette activité car M.Mentecki venait de faire une activité similaire. C'est suite à cette séance que j'ai eu cette l'idée de cette activité.
Le but de cet exercice est de montrer que Géogébra est utile pour faire des dessins propres et des conjectures de manière générale car il permet de faire plusieurs dessins en un en déplaçant des points.
Les premières questions consistent à construire la figure et d'étudier des cas particuliers.
Suite à ces questions, il sera mis en évidence une conjecture à faire que l'on contredira avec le logiciel.
Les dernières questions prouveront que la conjecture est exacte mais que le logiciel n'est pas fiable finalement.

Enoncé de l'exercice :

1) Ouvrez le document annexe 2.
Sur ce document les points A, B, C et D sont mobiles.

2) Placer les points I, J, K, et L milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
3) Tracer les segments [IJ], [AC], [JK] et [BD].
4) Faire apparaitre à l'écran les longueurs des segments [IJ], [AC], [JK] et [BD].
5) Déplacer les point A, B, C et D de sorte que :
a) $IJ = 2$
b) $IJ = 3,5$
c) $JK = 5$
d) $JK = 2,4$
Dans les cas a) et b), comparez la longueur des segments [IJ] et [AC].
Dans les cas c) et d), comparez la longueur des segments [JK] et [BD]. 6) Que se passe t'il lorsqu'on déplace le point A de sorte que $AC = 5,27$ ou $BD = 5,27$?

7) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, démontrer que $AC = 2IJ$ et $BD = 2JK$.

Comme on aurait pu le voir avec les élèves, ces deux activités montrent que les logiciels sont pratiques pour faire des calculs ou des illustrations précises mais qu'il est plus judicieux de faire des conjectures à la vue des résultats et pas affirmer que ce que l'on voit est vrai.
Les élèves sont un peu sensibiliser sur ce type d'exercices au collège lorsqu'ils voient que la calculatrice est limitée par la taille de l'écran (par exemple pour comparer deux fractions dont les nombres sont très grands).

I.2 Une illusion d'optique : le carré manquant

Niveau, objectifs et mise en œuvre

L'activité peut être proposée à des élèves de sixième (il suffit de connaître la notion d'aires, et savoir calculer l'aire d'un triangle rectangle). La proposer à des classes supérieures du collège permet de rendre les élèves acteurs en leur faisant réaliser la figure sous geogebra (au lieu de simplement leur montrer). En sixième, on peut procéder par découpage et recollement.

L'objectif est de convaincre les élèves qu'il faut se méfier de ce que l'on voit. L'observation n'est pas un outil de démonstration.

Description de l'activité

On demande aux élèves de construire la FIGURE 1 (on place les points$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$, on trace les polygones). On leur demande ensuite de calculer l'aire totale de la figure en prenant soin de ne pas dire qu'on a un triangle rectangle (puisque c'est faux) mais en espérant qu'ils le croient. Si certains calculent l'aire en sommant les aires de polygones, ils trouveront un résultat différent de celui de leurs camarades, et c'est le moment de passer à l'étape suivante.

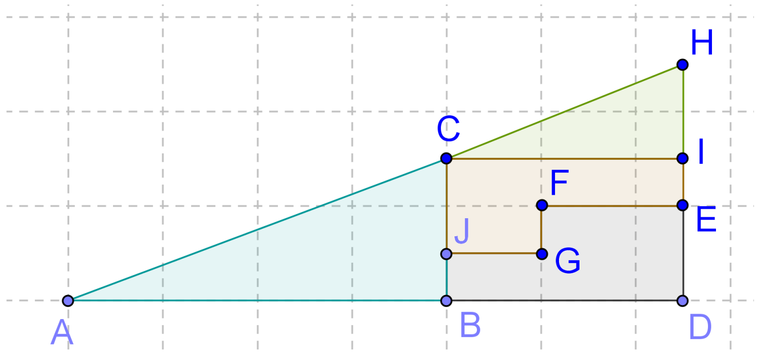


FIGURE 1 – Première configuration

Avec geogebra, on fait réaliser l'animation (il va falloir se servir de translations, qui ne sont malheureusement plus au programme de collège) ou bien on leur montre. Sinon, on procède par découpages (pas forcément plus long et pas nécessairement moins spectaculaire). Surprise : il manque un carré ! (FIGURE 2) En fait, en redisposant les polygones, on n'obtient pas la même figure. Avant la fin de la séance les élèves doivent être convaincus que *voir* n'est pas *démontrer*.

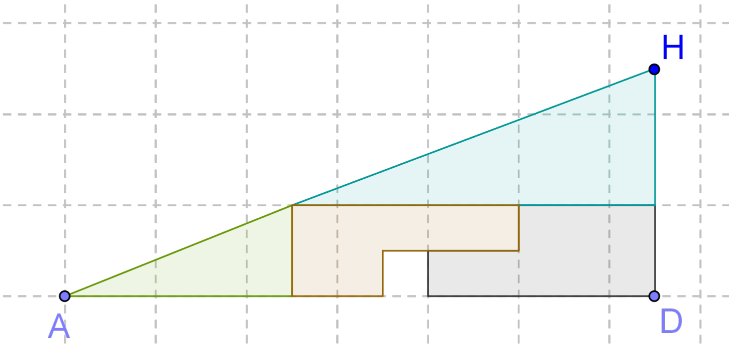


Figure 2 – Deuxième configuration

I.3 Une récurrence fausse

Niveau, objectifs et mise en œuvre

L'activité décrite ci-dessous est destinée à des élèves de terminale qui découvrent la récurrence. L'objectif est de souligner l'importance de la rédaction, et de montrer que sans rigueur, l'on peut « prouver » tout et n'importe quoi.

L'activité peut-être distribuée à des élèves en fin de cours, en leur demandant de réfléchir à la question pour le cours suivant.

Énoncé de l'activité

Il arrive que l'on fasse une mauvaise hypothèse de récurrence ou que la propriété soit fausse pour le rang n_0 choisi. Par exemple, trouver la faute dans la « démonstration » de l'assertion suivante :

Tous les crayons de couleur d'une même boîte ont la même couleur.

« DÉMONSTRATION : »

S'il n'y a qu'un crayon de couleur dans la boîte, c'est vrai.

Prenons comme hypothèse de récurrence :

S'il y a k crayons de couleur dans une boîte, ils ont la même couleur.

Prenons $k+1$ crayons de couleur. On en enlève un, le crayon A. Par hypothèse de récurrence, les k crayons de couleur qui restent ont la même couleur.

On remet A et on en en enlève un autre, B. Par hypothèse de récurrence, les k crayons de couleur qui restent ont la même couleur que A et aussi la même couleur que B, donc les $k+1$ crayons ont tous la même couleur.

I.4 Une autre récurrence fausse

Niveau, objectifs et mise en œuvre

Cette activité est destinée à des élèves de terminale S qui découvrent la récurrence dite *forte*.

L'activité peut-être distribuée à des élèves en fin de cours, en leur demandant de réfléchir à la question pour le cours suivant.

Énoncé de l'activité

Trouver la faute dans la « démonstration » de la proposition suivante :

Si a est un nombre réel non nul, alors on a pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a^{n-1} = 1$$

« Démonstration : »

Soit a un réel non nul.

Initialisation (rang 1) : $a^{1-1} = 1$

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que

$$\textit{Pour tout entier } k = 1, 2, ..., n-1, n, \textit{ on a } a^{k-1} = 1.$$

Montrons que $a^{(n+1)-1} = 1$.

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

Conclusion : pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a^{n-1} = 1$.

II Nos expérimentations

II.1 Convaincre de l'utilité de démontrer

II.1.a) Introduction

À plusieurs occasions, que ce soit en salle de classe ou à des cours particuliers, j'ai posé la question qui ne comporte qu'un mot : "Pourquoi ?". Les réponses attendues sont bien évidemment des justifications mathématiques. Seulement, les élèves ont tendance à répondre " parce que ça marche", "ça se voit" ou bien " si ça marchait pas, on demanderait pas de prouver que ça marche".
Toutes ces réponses sont données par certains élèves qui se contentent du résultat et n'éprouvent pas le besoin de démontrer.

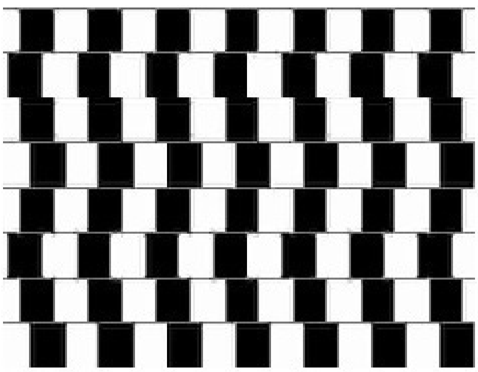
Les choses que nous voyons ne sont pas telles qu'elles nous paraissent. L'oeil est un instrument très précis et rapide mais cependant il peut parfois nous trahir. Comme exemple je prendrais les illusions d'optique.
L'illusion d'optique est une perception visuelle erronée d'objets réels. Les représentations d'objets sont faussées par des erreurs d'appréciation de longueur, de direction, de courbure etc...
Des objets, pourtant non dessinées, peuvent alors apparaitre.

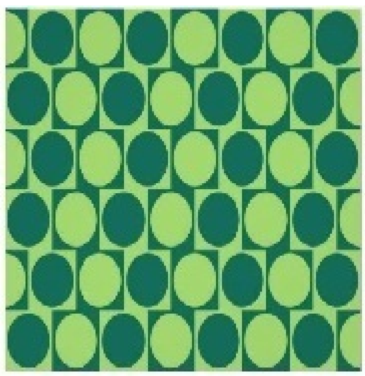
Des artistes découvrent des moyens de jouer sur la perspective et s'amusent à tromper l'oeil en créant l'illusion de la profondeur ou de mouvement.
Les chercheurs étudient les illusions d'optique pour mieux connaître notre système visuel. Ainsi, les illusions seraient produites par le cerveau qui analyse et corrige l'information transmise par l'oeil.

II.1.b) Les différentes illusions d'optique

Il existe plusieurs types d'illusions d'optique.

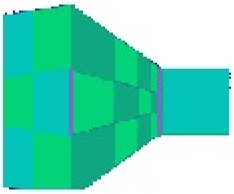
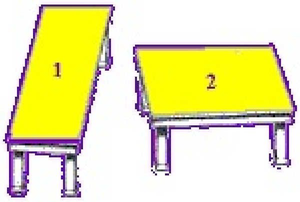
- **Les illusions dues aux erreurs de longueurs et d'angles**





Sur ces deux images, notre vue nous fait croire que les lignes sont tordues alors qu'elles sont toutes parallèles.

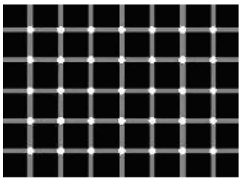
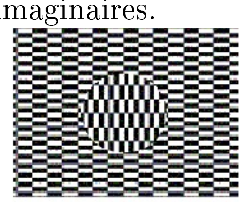
- **Les illusions dues aux effets de perspectives**

Sur la première image, l'effet de profondeur nous laisse croire que le bâton de droite est le plus grand alors qu'ils sont de la même taille.
Sur la seconde image, il semblerait que la table 1 soit plus longue et moins large et que pour la table 2 c'est l'inverse. En vérité, ces deux tables sont exactement les mêmes.

- **Les figures qui bougent**

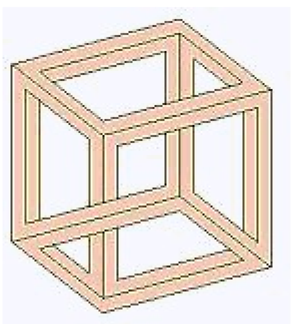
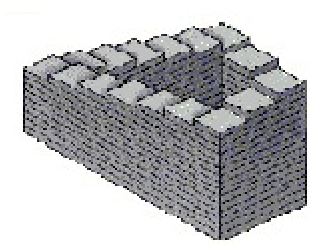
L'oeil humain se fatigue très vite lorsqu'il est contraint de fixer un objet : il se produit alors des mouvements imaginaires.

Sur la première image, on peut observer à première vue, des carrés noirs et des points blancs. Seulement, en regardant bien on peut voir apparaitre des points noirs à la place des blancs (il se peut que ce phénomène ne se voit pas correctement une une version imprimée de l'image). Si on regarde la deuxième image en bougeant la tête, on pourrait croire que l'image bouge.

- **Les images impossibles**

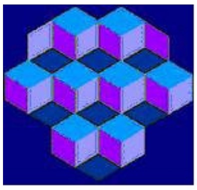
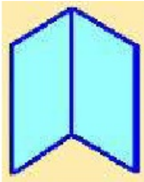
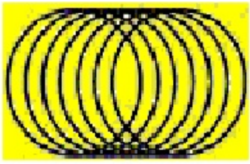
Des artistes comme Escher font des oeuvres en jouant sur la perspective pour réaliser des images impossibles.

Sur la première nos yeux ont envi de voir un cube alors que c'en est pas un et sur la deuxième, un escalier sans fin.

- **Les figures instables**

Comme le montre les images suivantes, il est possible de voir différentes choses sur la même image suivant la façon de regarder.

Sur la première image, si on se focalise sur les faces bleu ciel comme étant les faces supérieures des cubes alors il semble que les cubes soient posés sur un escalier et on en compte 8. Par contre si on se focalise sur les faces bleu foncé comme étant les faces inférieures des cubes alors il semble que cette fois-ci ils sont collés au plafond et on en compte 7.

Pour la deuxième image, on peut voir un livre ouvert vers nous ou bien ouvert dans l'autre sens.

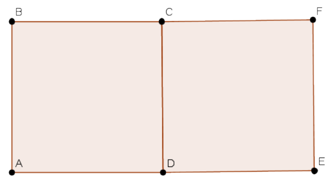
Pour la dernière image, suivant qu'on se focalise sur le cercle de gauche ou de droite, on observe un cylindre dont la face avant est le cercle sur lequel on se focalise.

II.1.c) Activités avec les élèves

Le but des activités sur les illusions d'optique à faire avec des élèves est de leur faire comprendre l'intérêt de démontrer les résultats observés.
Il est assez fréquent pour les élèves d'être convaincus d'une propriété géométrique sous prétexte que voir suffit.
Mais on a vu dans la partie précédente que sur certaines images il est possible de les interpréter de façons différentes. Un élève pourrait voir un carré alors qu'un autre pourrait voir un rectangle.

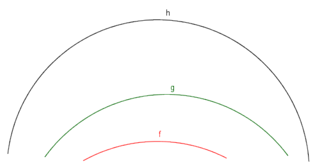
L'idéal pour ce type d'activité est que chaque élève puisse répondre sans être influencé par d'autres. C'est pourquoi, il est préférable de les placer dans les conditions (type interrogation écrite par exemple) pour éviter qu'ils discutent entre eux.
Bien entendu les résultats seront diffusés après mais il n'est pas nécessaire de dire qui a répondu quoi. On peut reprendre question par question et donner les résultats de façon statistique. Par exemple : en disant "Sur cette question, il y en a autant qui ont vu un carré alors que les autres ont vu un rectangle".

Au collège de Douchy-les-mines, les élèves ont à leur disposition, un système de télécommande qui permet de les interroger façon "code de la route".
Il y a déjà eu, avant mon stage, des séances où M.Mentecki proposait à ses Ĺeves de 6ième ou 4ième des questions sur des illusions d'optique.
M.Mentecki m'a donné l'occasion de poser des questions durant l'une de ses séances.
Voici deux questions que j'ai pu proposer à cette classe composée de 22 élèves. Les élèves ont eu 10 secondes par question pour répondre.



Question : Sur cette image il y a combien de carrés ?
Réponses : A 0 B 1 C 2 D 3

Plus de la moitié des élèves ont répondu la réponse C alors que la bonne réponse est la B.
Un seul a répondu A car pour lui c'était une question piège car il n'y a que des rectangles.
J'ai fais la correction en leur montrant le fichier Géogébra avec lequel j'ai fais la figure pour leur montrer que seul le quadrilatère de droite est un carré.
Les élèves ont répondu suite à la correction que c'était une question difficile car la différence est à peine visible voire pas du tout à l'oeil nu. Ce qui a permis de leur montrer que l'oeil n'est pas le meilleur outil pour justifier.



Question : Parmi ces trois arcs, quel est celui qui provient du cercle dont le rayon est le plus grand ?

Réponses : A le noir B le rouge C le vert D autre

Aucun n'a répondu A ou C.
Il y a eu 13 B et 9 D.
En regardant la réponse D plusieurs élèves ont été perturbés. N'étant pas la première question, les élèves ont réalisé que les questions portaient sur l'interprétation de ce que l'on voit et cherchaient les "pièges".

Dix secondes c'est très court. Les élèves ont voulu plus de temps pour réfléchir à la question, c'est pourquoi avant la correction, j'ai voulu écouter les affirmations de certains.
Pour ceux qui ont mis la réponse B, c'est à dire l'arc le plus en bas, ils se sont justifiés en disant qu'il était facile d'imaginer le cercle en entier et qu'il était clairement plus grand que les autres.

Ceux qui ont répondu la réponse D, se sont justifiés en disant qu'il y avait surement un piège mais n'ont pas su me dire qu'elle était la réponse exacte.

Lors de la correction, on a vu qu'en vérité, les trois arcs proviennent du même cercle. Bien qu'ils soient satisfaits d'avoir la bonne réponse, je pense qu'ils ont compris que voir ne suffit pas car suite à cette séance, la plupart d'entre eux se méfie de ce qu'ils observent (chose que j'ai pu remarqué lors de la séance TICE que j'ai présentée).

II.2 Aider à rédiger une démonstration

II.2.a) Activité 1 : angles inscrits et angle au centre

Niveau, objectifs et mise en œuvre

Cette activité, dont l'énoncé est en annexe 3, est destinée à une classe de troisième, en tant qu'introduction au chapitre « Polygones réguliers, angles inscrits et angle au centre ».

Les élèves ont vu la notion d'angle au centre et d'angle inscrit à la séance précédente ; cette activité sera donc précédée d'un temps de rappels (interrogation orale) d'environ 5 minutes.

L'objectif de cette activité est de faire démontrer la propriété selon laquelle l'angle au centre est le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.

L'activité, prévue sur deux heures, se déroule en trois temps *(cf l'énoncé de l'activité en annexe)* :

- Premier temps (partie A) : construction de la figure à l'aide de Geogebra en salle pupitre ; constatations et conjectures.

- Deuxième temps (partie B) : Démonstration guidée. Cas particulier (cas 1 où $[BC]$ est un diamètre du cercle) ; puis cas général qui se démontre grâce au cas particulier.

- Troisième temps (partie C) : Synthèse. Qu'avons-nous démontré ? Conséquence de la propriété.

Analyse *a priori*

Cette propriété est l'occasion de faire travailler les élèves sur une démonstration de collège à étapes, avec disjonction des cas.
La particularité de cette démonstration est que le cas général, lui-même scindé en deux cas, se démontre grâce à un cas particulier.

Il était prévu de faire construire un déductogramme (cf. activité 2) à l'occasion de cette démonstration, mais cela n'a pas été possible car Mme Camurat a jugé que c'était inutile dans sa classe de troisième (supposée être au point dans l'exercice de la démonstration). Le déductogramme qui était attendu des élèves est néanmoins donné en annexes.

En remplacement du déductogramme, j'ai utilisé un code couleur au tableau, qui devait être reproduit par les élèves ; en voici le principe. A chaque fois qu'une conjonction de coordination est utilisée, on la souligne en bleu ; lorsqu'un résultat précédemment démontré est utilisé, on le souligne dans une couleur et on souligne « d'après... » dans la même couleur.

Ce code couleur permet d'avoir une *vision* globale du cheminement de la démonstration, et permet de renforcer les automatismes de rédaction.

Analyse *a posteriori*

Le temps de rappels et de correction d'exercices n'a pas débordé sur le reste. La construction de la figure sous Geogebra, que les élèves utilisaient pour la première fois, s'est bien déroulée. Le poste maître de la salle pupitre permet de suivre le travail des élèves sans devoir passer derrière chacun d'eux, et de faire une présentation au vidéo-projecteur ou sur les postes de tout ou partie des élèves. Ces outils permettent de gagner un temps considérable dans le déroulement d'une activité TICE.

Le bon déroulement de ces deux premières parties a permis de consacrer 70 minutes à la partie qui intéresse notre sujet, à savoir la démonstration de la propriété.

Les élèves ont bien assimilé la méthode des codes couleurs décrite ci-dessus. Le cas particulier a été un peu long, car il fait appel à des propriétés vues parfois à des niveaux inférieurs, et les élèves ont besoin de temps pour activer ou réactiver leur mémoire.

Pour la démonstration du cas général, il a fallu aider les élèves à voir en quoi le cas particulier allait nous être utile. En cachant la moitié de la figure sur le vidéo-projecteur, j'ai eu des « ohhh » et des « haaa » rassurants.

Le cas 3 a seulement été initialisé, il a été demandé aux élèves de le faire en tant que devoir à la maison, ce qui était en vérité prévu (*cf* annexes pour des travaux d'élèves).

Les élèves ont semblé avoir amélioré leur vision d'une démonstration « compliquée », à étapes, les couleurs les ont aidés à bien rédiger, en appelant les résultats précédents au bon moment et en utilisant les conjonctions à bon escient.

II.2.b) Activité 2 : utilisation d'un déductogramme

Un mot sur les activités 2 et 3
Nous avons pensé qu'il serait intéressant de tester deux outils différents pour résoudre le même problème.

Ainsi, partant d'un problème simple (cf annexe 4), nous avons conçu deux activités ; l'une utilisera un déductogramme (activité 2, mise en œuvre par Julien), l'autre des phrases mélangées (activité 3, mise en œuvre par Arnaud).

Qu'est-ce qu'un déductogramme ?

Un *déductogramme* est un diagramme qui respecte la logique suivante :

– chaque case représente un résultat (exemple, le triangle ABC est rectangle),

– deux cases sont reliées par une flèche si la case d'arrivée a été déduite de la case de départ,

– au-dessus de chaque flèche, on note la propriété utilisée pour relier les deux cases concernées,

– autant que possible, les flèches vont de gauche à droite et de haut en bas.

Ainsi, les données de l'énoncé figurent dans les cases tout à gauche (ou les plus hautes), et LA case la plus à droite (ou la plus basse) est le résultat qu'il fallait démontrer.

Une légende accompagne le déductogramme, pour alléger l'énoncé des propriétés à côté des flèches (cf annexe 5 pour des exemples, produits par mes élèves).

Déroulement de l'activité

L'énoncé de l'activité (annexe 4), est volontairement court, voire minimaliste. On veut donner aux élèves un problème non pré-mâché. L'essentiel du travail d'accompagnement s'est fait en classe, et non dans l'énoncé.

Ainsi, j'ai construit le déductogramme avec eux, au tableau, « sous leur dictée ». Puis ils ont rédigé une démonstration en prenant appui sur le déductogramme.

Analyse
L'étape de construction du déductogramme est en soi un excellent exercice, qui met à nu les lacunes des élèves : quelles sont les données de l'exercice ? que cherche-t-on ? peut-on arriver directement au résultat ? pourquoi ? que nous manque-t-il ? sont autant de questions qui font progresser les élèves, et écrire les réponses à ces questions sous forme d'un diagramme permet une relecture synthétique et immédiate du travail accompli.

Pour ce qui est du deuxième temps (celui de la rédaction), puisque chaque flèche du déductogramme correspond à une étape, et respecte la phrase type « on a..., or d'après..., donc... », la rédaction est largement facilitée, en évitant l'accumulation de mots clés différents, et en se concentrant sur un système purement déductif.

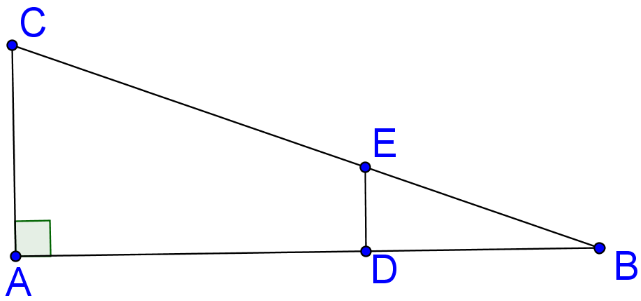
Même si les meilleurs élèves ont répété qu'ils « n'avaient pas besoin de tout ça pour y arriver », cette séance a été positive, tous les élèves ayant rendu de bonnes rédactions.

II.2.c) Activité 3 : phrases dans le désordre

Cette activité est destinée à des élèves de troisième.

On distribue aux élèves des morceaux de papiers sur lesquels sont écrits des phrases contenant des propositions ou bien des calculs.
Les élèves doivent placer les morceaux de papiers dans le but de reconstituer la résolution du problème. Ils sont libres de choisir eux même leurs liens logiques (Comme....Alors, ...Car...., Si... Alors.... Donc..., etc)

L'énoncé



Sur le dessin ci-dessus, on sait que ABC est un triangle rectangle en A.
AB=9cm, BD=3cm, DE=4cm et EB=5cm.
Calculer la longueur AC.

Sur la page suivante, on trouve les morceaux à placer. Tous ne seront pas utiles à la démonstration.

(DE) est perpendiculaire à (AB) / (AC) est perpendiculaire à (AB)

le triangle ABC est rectangle en A / le triangle DEB est rectangle en D

D est un point de [AB] / E est un point [CB]

(DE) et (AC) sont parallèles

le théorème de Pythagore / la réciproque du théorème de Pythagore

le théorème de Thales / la réciproque du théorème de Thales

$BD^2+DE^2= 3^2+4^2=25=5^2=BE^2$ / $AB^2+AC^2=CB^2$

$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}=\frac{1}{3}$

si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles

$BC = 3DE = 3x4 = 12cm$

Analyse *a priori* :

L'activité permettra aux élèves de vérifier leurs acquis sur les deux principaux théorèmes de géométrie (Pythagore et Thalès).
On peut s'attendre à ce que les élèves commencent par trier les phrases suivant qu'elles soient les hypothèses ou les conclusions.

Il se peut que certains partent de la réponse pour "remonter" la démonstration alors que d'autres cherchent directement la démonstration.
Comme toutes les phrases ne sont pas utilisées, il se peut que certains les utilisent correctement mais que le résultat n'est pas celui attendu.

Déroulement de l'activité :

Quinze élèves ont participé à cette activité. On a formé 5 groupes de trois élèves.
On a conseillé aux élèves de commencer par trier les informations en essayant d'identifier celles qui seront utiles ou non. De voir celles qui vont ensemble (par exemple, le triangle DEB rectangle en D et le théorème de Pythagore).
Un groupe pensait qu'il manquait des phrases car il voulait faire autrement. Il pensait utiliser le théorème de Thalès pour calculer la longueur BC pour ensuite utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle ABC. Seulement cette méthode est plus longue et inutile.
L'activité a été très rapide. En 40 minutes tous les groupes ont finis l'exercice. On a profité du temps restant pour revenir sur les différents problèmes observés.

Parmi ces problèmes il y a eu des raisonnements corrects mais qui ne répondaient pas à la question posé par exemple en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.

Analyse *a posteriori* :

Cette activité a été vu par les élèves comme un bon exercice de révisions. Ils ont eu un DS de révisions depuis et tous ont bien réussi l'exercice de géométrie dans lequel il fallait également utiliser ces théorèmes.
Il faudrait peut être trouver un problème dont la démonstration est un peu plus longue pour ne pas finir trop tôt.
Je pense que cette activité a été utile pour les élèves. Je la referai surement si j'ai l'occasion d'avoir une classe de 3ième. Cependant il est tout à fait possible d'adapter ce type d'activité à d'autres niveaux sur d'autres thèmes.

Conclusion

Il n'y a pas de mathématiques sans démonstration, et il n'y a pas de démonstration sans mathématiques : c'est un peu ce que nous avons voulu inculquer aux élèves au travers des deux pans de notre problématique.

Les activités portant sur les illusions d'optique ont porté leur fruit : les élèves qui les ont « subies » sont devenus plus méfiants vis à vis de ce qu'ils *voyaient* (au point peut-être, de se méfier trop souvent !).
L'objectif de ces activités était de convaincre les élèves de l'utilité d'une démonstration, et en cela, c'est une réussite. Nous pensons tous les deux réutiliser ce genre d'activités dans nos futures classes, en les distillant goutte à goutte tout au long de l'année scolaire, et à tout niveau.

Pour ce qui est de l'aide à la rédaction, deux outils ont été testés, sur un même problème (activités 2 et 3) : le déductogramme, et les phrases dans le désordre.

Le déductogramme a donné des résultats positifs, en ce sens qu'il a fait comprendre aux élèves le cheminement d'une démonstration à trois étapes. Les élèves ont bien compris que chaque passage d'une case à une autre dans le déductogramme doit faire l'objet d'une étape (résultat - propriété - nouveau résultat). L'assimilation de la phrase type « On a ..., or d'après..., donc... » est facilitée grâce à l'outil visuel qu'est un diagramme.

Les phrases mélangées ont l'avantage de faire manipuler, littéralement, des morceaux de démonstration ; les remettre dans l'ordre et utiliser les bonnes conjonctions entre chaque morceau est un exercice intellectuel enrichissant pour un élève, qui permet de se consacrer à la rédaction en insistant sur les « petits mots » qui relient deux morceaux (or, donc, comme, d'après, on a, par, si, alors), que les élèves ont, pour certains, tendance à mélanger. Travailler sur ce vocabulaire ne sera jamais une perte de temps pour un professeur de mathématiques, quel que soit le niveau des élèves auquel il fait face.

Aussi pensons-nous, malgré le peu d'occasions qui nous ont été offertes pour expérimenter, que les efforts engagés dans la conception de ce mémoire n'ont pas été vains. Travailler une ou deux heures avec une classe ne va pas fondamentalement changer les élèves, mais nous sortons de ces expériences convaincus que dans l'apprentissage des mathématiques, la démonstration mérite qu'on y consacre beaucoup de temps et d'énergie.

Références

1. Braconne-Michoux A., Maths 3ème, coll. Diabolo, Hachette, 2008

2. Bouillis M. *et al.* , Mathématiques 4ème, coll. Myriade, Bordas, 2011

3. Bouillis M. *et al.* , Mathématiques 3ème, coll. Myriade, Bordas, 2011

4. `media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/7/doc_acc_clg_raisonnement&demonstration_109177.pdf`

5. `http://jeusetetmath.free.fr/illusion_d'opt.html`

6. `http://ophtasurf.free.fr/illusions.htm`

Annexes

Annexe 1

Le Classeur de Géométrie

5e 6e

Collège Émile LITTRÉ, v. 2011

Pour démontrer que ...

Un point est le milieu d'un segment	1 (haut)
Deux points sont symétriques	1 (centre)
Un point est sur un cercle	1 (bas)
Un point est sur la médiatrice d'un segment	10 (bas)

Des distances sont égales	4
Des angles sont égaux	3

Deux droites sont parallèles	5 (haut)
Deux droites sont perpendiculaires ou un angle est droit	6 (haut)
Une droite est médiatrice	7 (haut)
Une droite est bissectrice	7 (bas)
Une droite est médiane	5 (bas)
Une droite est hauteur	6 (bas)

Un triangle est isocèle	8 (haut)
Un triangle est équilatéral	8 (centre)
Un triangle est rectangle	8 (bas)

Un quadrilatère est un parallélogramme	9 (haut)
Un quadrilatère est un rectangle	9 (centre)
Un quadrilatère est un losange	10 (haut)
Un quadrilatère est un carré	9 (bas)

Pour calculer ...

Calculer une distance	2 (haut)
Calculer un angle	2 (bas)

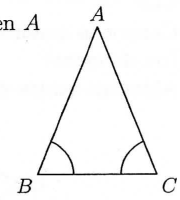
Annexe 2

Des angles sont égaux

3

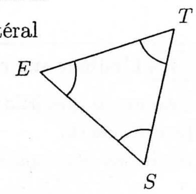
1 Utiliser un triangle isocèle

Comme le triangle ABC est isocèle en A
Alors ses angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égaux.



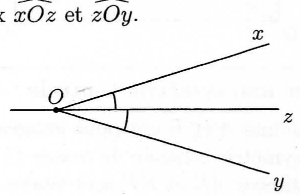
2 Utiliser un triangle équilatéral

Comme le triangle EST est équilatéral
Alors ses trois angles $\widehat{E}$, $\widehat{S}$, $\widehat{T}$ sont égaux à 60°.



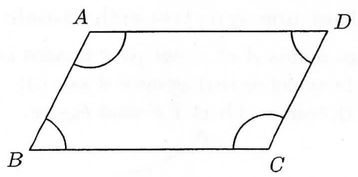
3 Utiliser une bissectrice

Comme la droite (Oz) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$
Alors cette droite (Oz) partage cet angle $\widehat{xOy}$ en deux angles égaux $\widehat{xOz}$ et $\widehat{zOy}$.



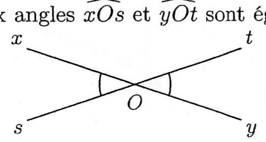
4 Utiliser un parallélogramme, un losange

Comme le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (*ou* un losange)
Alors ses angles opposés $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ **ainsi que** $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont égaux.



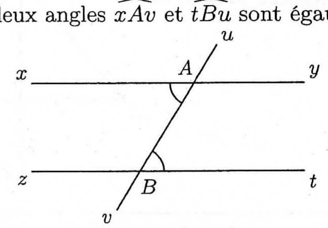
5 Utiliser des angles opposés par le sommet

Comme les deux angles $\widehat{xOs}$ et $\widehat{yOt}$ sont opposés par le sommet O
Alors ces deux angles $\widehat{xOs}$ et $\widehat{yOt}$ sont égaux.



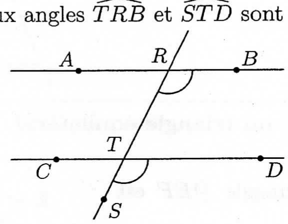
6 Utiliser deux droites et une sécante

Comme les deux angles $\widehat{xAv}$ et $\widehat{tBu}$ sont alternes–internes formés par deux droites parallèles (xy) et (zt) **et** une sécante (uv)
Alors ces deux angles $\widehat{xAv}$ et $\widehat{tBu}$ sont égaux.



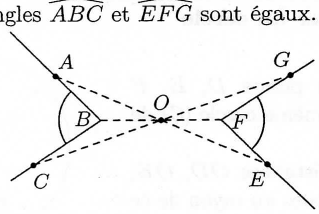
7 Utiliser deux droites et une sécante

Comme les deux angles $\widehat{TRB}$ et $\widehat{STD}$ sont correspondants formés par deux droites parallèles (AB) et (CD) **et** une sécante (RT)
Alors ces deux angles $\widehat{TRB}$ et $\widehat{STD}$ sont égaux.



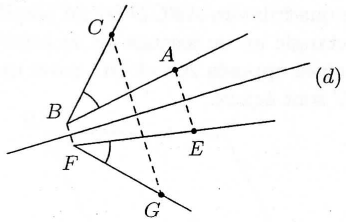
8 Utiliser une symétrie centrale

Comme les points A, B, C ont pour images les points E, F, G par une symétrie centrale de centre O
Alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFG}$ sont égaux.



9 Utiliser une symétrie orthogonale

Comme les points A, B, C ont pour images les points E, F, G par une symétrie orthogonale d'axe (d)
Alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFG}$ sont égaux.

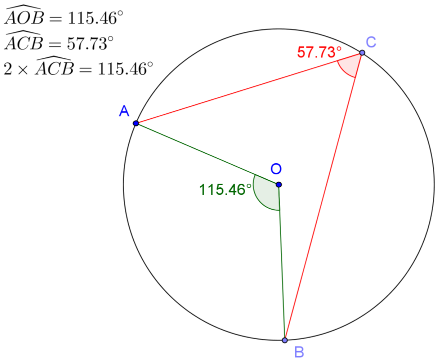


Annexe 3 : angles inscrits et angle au centre, l'énoncé

librement adapté de [1].

A. Construire, observer et conjecturer

1. Nous allons construire la figure ci-dessous avec le logiciel Geogebra.



   a) Placer deux points O et A.

   b) Construire le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par A.

   c) Placer deux points B et C sur le cercle $\mathcal{C}$.

   d) Tracer les segments $[AO]$, $[OB]$, $[AC]$ et $[CB]$. Faire apparaître les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ sur la figure. Renommez-les respectivement « AOB » et « ACB ».

   e) Créer une zone de texte et y recopier les lignes suivantes, en prenant soin de cocher l'option « formule LaTeX » :

```
$ \widehat{AOB}= AOB $
$ \widehat{ACB}= ACB $
$2 \times \widehat{ACB}= 2*ACB $
```

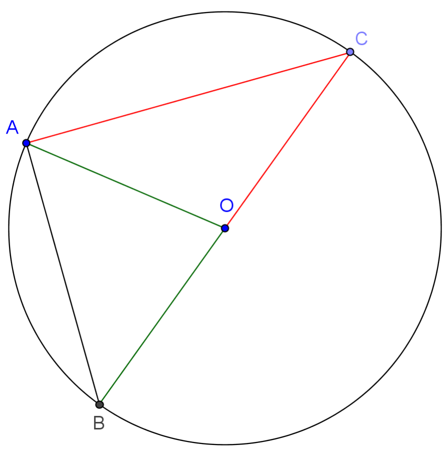
   Votre figure est terminée !

2. a) Faire varier la position du point C sur le cercle $\mathcal{C}$. Que constate-t-on ?

   b) Faire varier la position du point B sur le cercle $\mathcal{C}$. Peut-on faire la même constatation que précédemment ?

   c) Ainsi, que peut-on *conjecturer* ?

B. Démontrer



1. Cas 1 : le segment $[CB]$ est le diamètre du cercle $\mathcal{C}$ (*cf figure ci-contre*)

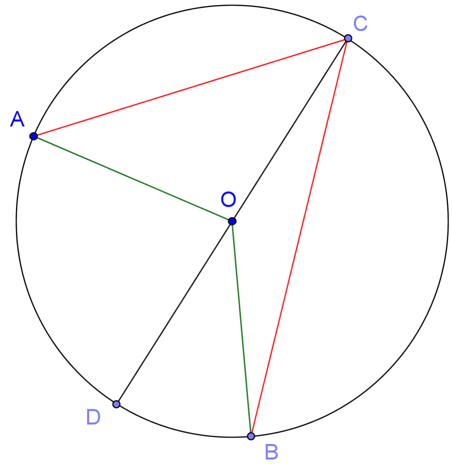
   a) Justifier que le triangle ABC est rectangle en A.

   b) Exprimer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{ACB}$.

   c) Quelle est la nature du triangle $\widehat{AOB}$? Justifier.

   d) En vous servant des résultats des questions *b*) et *c*), exprimer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{ACB}$. (vous devriez aboutir à la conclusion que vous avez conjecturée)

2. <u>Cas 2</u> : les points A et B sont de part et d'autre du diamètre $[CD]$ (*cf figure ci-dessous*)



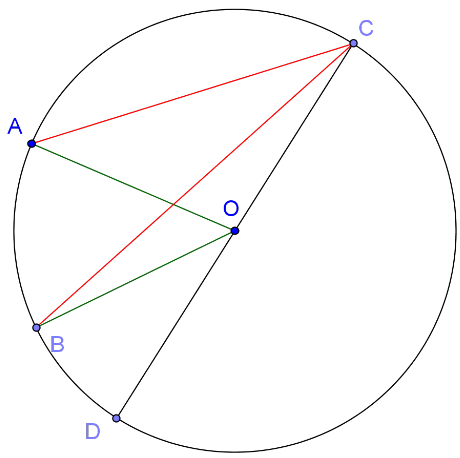
Soit D le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à C.

a) En utilisant le résultat que vous avez démontré dans la question 1., quelle relation peut-on écrire entre les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{ACD}$?

b) Quelle relation peut-on écrire entre les angles $\widehat{DOB}$ et $\widehat{DCB}$?

c) Exprimer alors la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{ACB}$.

3. <u>Cas 3</u> : les points A et B sont du même côté (*cf figure ci-dessous*)
En vous appuyant sur les étapes de la question 2., démontrer que $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}$.

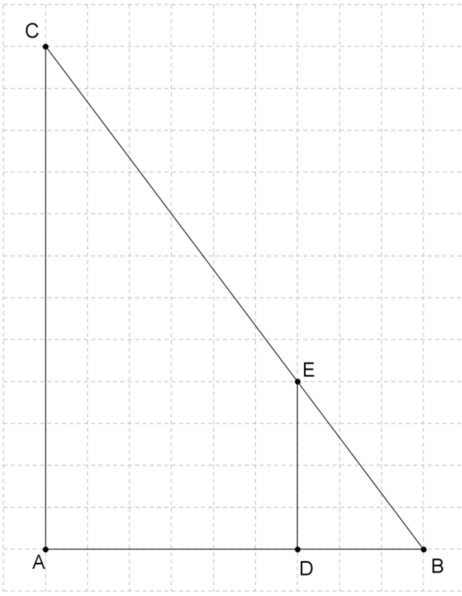


C. Synthèse

1. Dans les trois cas étudiés, les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc de cercle. Avons-nous balayé tous les cas possibles ? Quelle propriété peut-on énoncer ?

2. Placer un point E sur le cercle $\mathcal{C}$. Tracer les segments $[AE]$ et $[EB]$. Faire apparaître l'angle $\widehat{AEB}$. Que constate-t-on ? Énoncer une conséquence de la propriété démontrée en partie B.

Annexe 4 : activité 2, l'énoncé



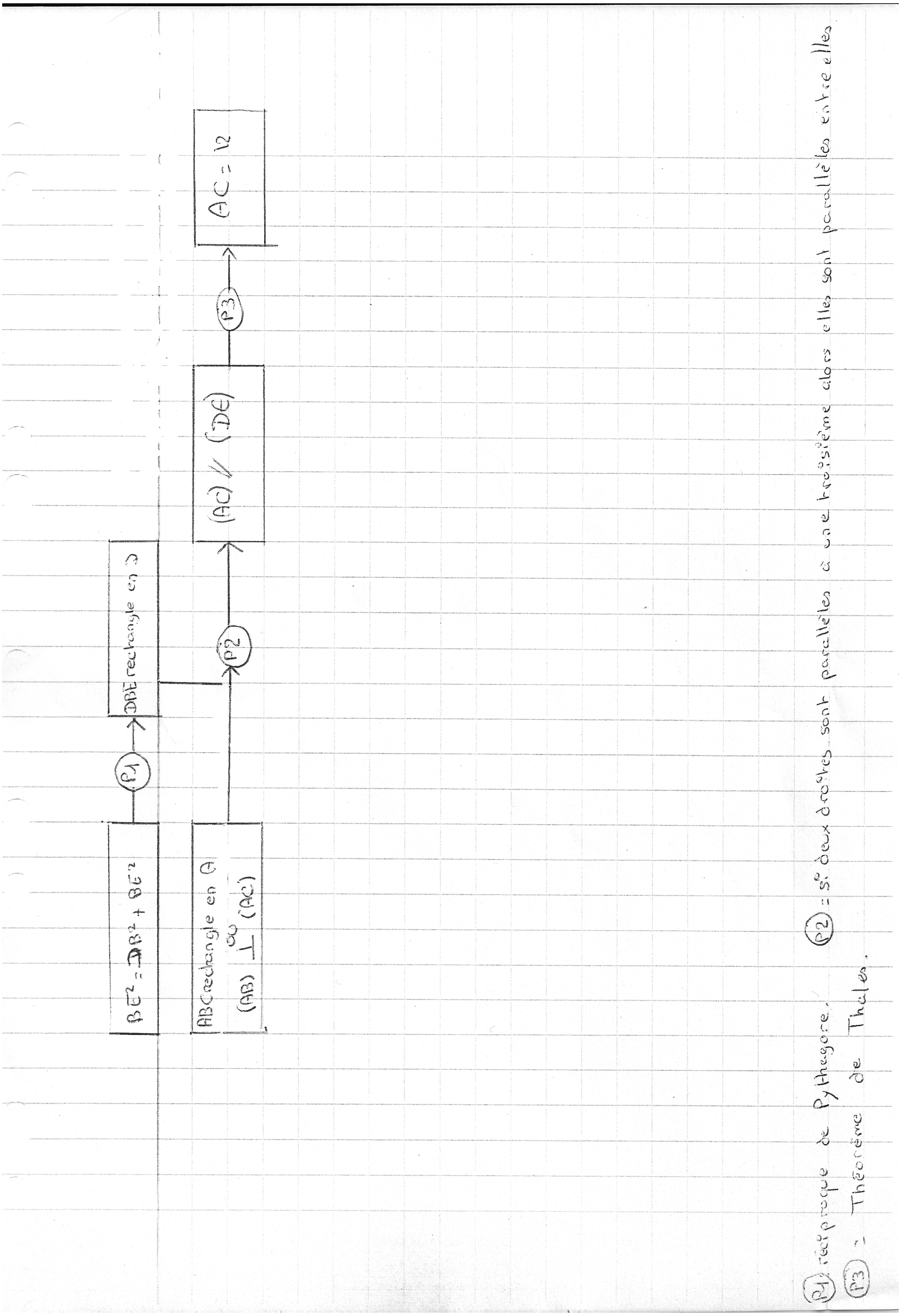
Sur le dessin ci-contre, le triangle ABC est rectangle en A.

E est sur le segment $[BC]$ et D est sur le segment $[AB]$.

On donne : $AB = 9, BD = 3, DE = 4, EB = 5$.

Calculer la longueur AC.

Annexe 5 : déductogrammes, productions des élèves



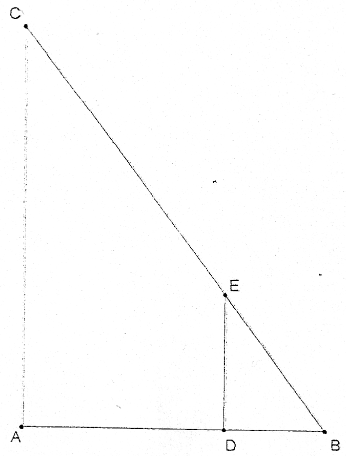
Révisions pour le brevet : géométrie

Troisième Lincoln

Sur le dessin ci-contre, le triangle ABC est rectangle en A. E est sur le segment $[BC]$ et D est sur le segment $[AB]$. On donne :

$AB = 9, BD = 3, DE = 4, EB = 5$

Calculer la longueur AC.



1ère étape :

$BE^2 = 5^2 = 25$

$DB^2 + DE^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$

Comme $BE^2 = DB^2 + DE^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore

DBE est rectangle en E.

2ème étape : $(AC) \perp (AB)$ et $(DE) \perp (AB)$

Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors ces deux droites sont parallèles entre elles.

Donc $(AC) // (DE)$.

3ème étape :

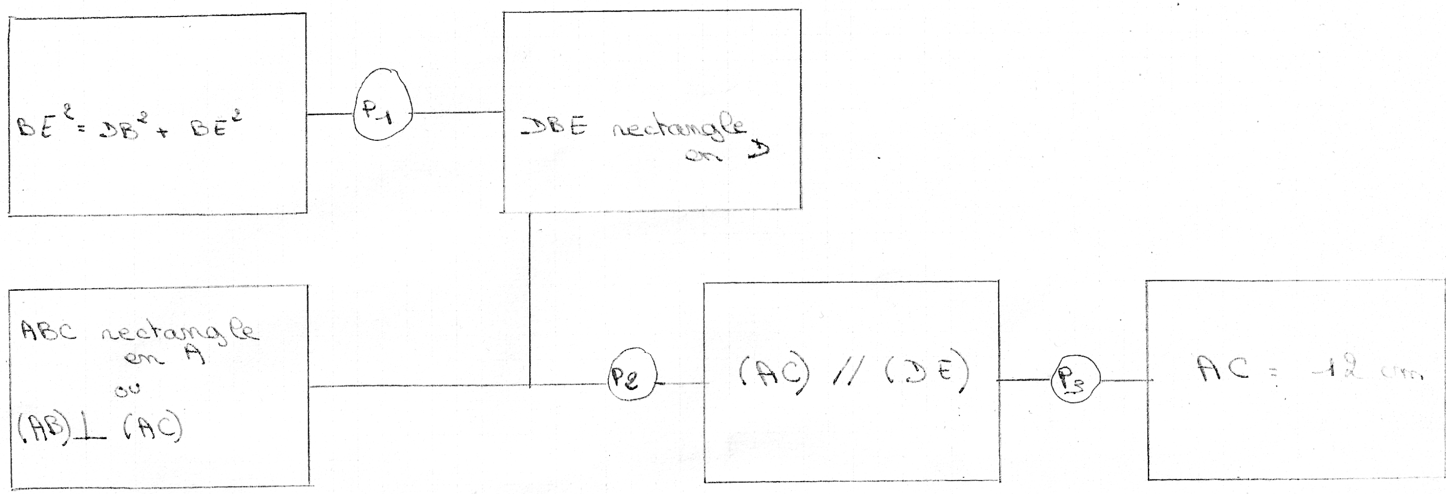
B, D, A sont alignés dans cet ordre, B, E, C sont alignés dans cet ordre, (CA) et (ED) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{DE}{AC} = \frac{DB}{AB}$$

$$\frac{AC \times \cancel{DB}}{\cancel{DB}} = \frac{DE \times AB}{DB}$$

$$AC = \frac{DE \times AB}{DB} \qquad AC = \frac{4 \times 9}{3} = \frac{36}{3} = 12.$$

Donc $AC = 12$.



P1 : réciproque de Pythagore

P2 : Si 2 droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles entre elles.

P3 : théorème de Thalès

Annexe 6 : phrases mélangées, productions d'élèves

upe 3 Elise – Romain – Samuel

Comme $BD^2+DE^2= 3^2+4^2=25=5^2=BE^2$ par

la réciproque du théorème de Pythagore , le triangle DEB est rectangle en D

or D est un point de [AB] donc (DE) est perpendiculaire à (AB)

Comme le triangle ABC est rectangle en A alors (AC) est perpendiculaire à (AB)

or si deux droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles

donc (DE) et (AC) sont parallèles

nous pouvons utiliser le théorème de Thales

et dire que $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{3}$

conclusion $BC = 3DE = 3x4 = 12cm$

le segment [BC] mesure 12 cm